10/11/15

Άσκηση Β1 (Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων) σελίδα 17

f συνάρτηση στο $(0,\infty)$, δεν μηδενίζεται σε n τουλάχιστον σημεία.
Νδο $f_k(x) = x^{k-1} f(x)$, $x \in (0,\infty)$ $(k=1,\dots,n)$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Υποθέτουμε ότι $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$, c_k $(k=1,\dots,n)$ σταθερές.
$(c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1}) f(x) = 0 \quad \forall x>0.$
ας είναι x_k $(k=1,\dots,n)$ σημεία ανά δύο στα οποία η f δεν μηδενίζεται. Τότε:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 x_1 + \dots + c_n x_1^{n-1} = 0 \\ c_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ c_1 + c_2 x_n + \dots + c_n x_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα, με αγνώστους $c_1, c_2, \dots, c_n$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, αφού η ορίζουσα του είναι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

(Ορίζουσα Vandermonde), μέσω της οποίας αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Ορισμός

Ας είναι $f_1, \dots, f_k : I \to \mathbb{R}$, $k-1$ φορές παραγωγίσιμες στο I. Η ορίζουσα: $W(y_1, \dots, y_k)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ y_1' & y_2' & \dots & y_k' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$

καλείται ορίζουσα Wronski των $y_1, \dots, y_k$.

Παράδειγμα

• $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & xe^x \\ 2x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = \dots$$

• $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1.$$

• $x, x^2, \dots, x^k$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & \dots & x^k \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & kx^{(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (k-1)! & n(k-1)(k-2)\dots 2x \end{vmatrix} = \dots \text{ (με επαγωγή)}$$

• $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (k-1)! \end{vmatrix} = 2!\,3!\dots(k-1)! \neq 0$$

που σημαίνει ότι έχουν σταθερή ορίζουσα Wronski.

Ομογενής γ.Δ.Ε

(E_0) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$a_n(x) \neq 0$ $x \in I$, a_i $(i = 1, \dots, n) \in C(I)$

* Λύση: $y \in C^n(I)$: που ικανοποιεί την (E_0).

$L : C^n(I) \to C(I)$ || γραμμικός

$\varphi \to L(\varphi) = a_n \varphi^{(n)} + \dots + a_1 \varphi' + a_0 \varphi$

τότε (E_0): $L(y)=0$.

$\Rightarrow$ για $\left.\begin{array}{l}\varphi_1,\varphi_2 \in C^{(n)}(I)\\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow L(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1L(\varphi_1)+c_2L(\varphi_2)$

Απόδειξη με αντικατάσταση

$L(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=a_n(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)^{(n)}+\dots+a_1(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)'+a_0(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)$
$=a_n[c_1\varphi_1^{(n)}+c_2\varphi_2^{(n)}]+\dots+a_0(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1L(\varphi_1)+c_2L(\varphi_2)$

Θεώρημα 3 σελίδα 65

Αν $y_1,\dots,y_k$ λύσεις της (E_0), τότε η $y=c_1y_1+\dots+c_ky_k$ είναι επίσης λύση της (E_0) στο I, $\forall c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

$L(y)=L(c_1y_1+\dots+c_ky_k)$
$=c_1\underbrace{L(y_1)}_{0}+\dots+c_k\underbrace{L(y_k)}_{0}$
$=0$.

Παράδειγμα

$y''+y=0$, $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$
$y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$
$y_3(0)=5$, $y_3'(0)=7$ ②
τότε $y=5y_1+7y_2$

Θεώρημα 4 (σελίδα 65-66)

Ας είναι $y_1,\dots,y_k$ λύσεις της (E_0), τότε:
Οι $y_1,\dots,y_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ $W(y_1,\dots,y_k)(x)\neq 0$ $\forall x\in I$

Άσκηση Α27 ii) (Φυλλάδιο Άλυτων Ασκήσεων)

συνέχεια...

$y(x)=-\int_x^{\infty} b(s)e^{\int_s^x a(n)dn}ds$

$y'(x)=b(x)e^{\int_x^x a(n)dn}+\left[-\int_x^{\infty}\frac{d}{dx}b(s)e^{\int_s^x a(n)dn}ds\right]$

$$b(x)-\int_x^{\infty} b(s)e^{\int_s^x \alpha(n)dn}\alpha(x)ds = b(x)-\alpha(x)\int_x^{\infty} b(s)e^{\int_t^x \alpha(n)dn} ds =$$

$b(x)+a(x)y(x)$

$y'(x) - \alpha(x)y(x) = b(x)$ ολοκληρώσιμη $[x,t]$
με την προϋπόθεση ότι y: φραγμένη
παραγωγίζω ως προς x:
$$\left[e^{-\int_x^t \alpha(s)ds} y(x)\right]' = b(s)\, e^{-\int_x^t \alpha(u)du} \ldots$$
και ύστερα $t \to +\infty$, η αρχική τιμή θα πηγαίνει στο 0, όλες φραγμένες

· Τέστ - Εικονική βαθμολόγηση ·

· Άσκηση 32 σελίδα 57
Να αποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης.
(Σημείωση: Το βιβλίο έχει άλλο τίτλο στην άσκηση)
$y' = (x^2+y+1)(x^2+y-3/2)+(1-2x)$ βαθμολόγηση: 1.

- Θέτω $z = x^2+y+1$
$z' = 2x+y'$
$z^2 = z(z-5/2)+1$
$= (z-2)(z-1/2)$
$\dfrac{dz}{(z-2)(z-1/2)} = dx$

$z=2$ και $z=1/2$ αρχικές 0,6, και το υπόλοιπο 0,4 αν βρεθεί η λύση.

· Άσκηση 3 σελίδα 28
$y' = (4y+e^{-x^2})e^{2y}$, $y(0)=0$ $\quad I = \left[\dfrac{-1}{8\sqrt{e}}, \dfrac{1}{8\sqrt{e}}\right]$ 1

$y' = f(x,y)$
$f(x,y) = (4y+e^{-x^2})e^{2y}$, $[-\alpha,\alpha]\times[-b,b]$ $\alpha, b>0$
$r = \max\{a, b/M\}$, $M = \sup_R |f(x,y)|$
$|f(x,y)| = |(4y+e^{-x^2})e^{2y}|^R$, μέγιστη τιμή η μονάδα
$\max_{|y|\le b} |f(x,y)| = \max |4y+1|\, e^{2y}$ // Εφαρμογή Θεωρήματος 0,5
$\varphi(t) = (4t+1)e^{2t}$ $t\in[0,b]$ // και το υπόλοιπο [illegible]